Mecánica Estadística. Fiz2220
Ayudantía 9

César Augusto Hidalgo Ramaciotti
Licenciado en Física Facultad de Física.
Pontifícia Universidad Católica de Chile.

Ejercicio 1 Encuentre una relación que le permita calcular $(\partial U/\partial V)|_T$ para un gas cualquiera. Utilize esto para encontrar la variación de la energía con respecto al volumen en un gas ideal y en un gas de Van der Waals.

Solución Como vemos que nuestra expresión es satisfecha para temperatura constante, buscamos un potencial que tenga como variables naturales V y T. Este es la energa libre de Helmholtz.

$$F = U - TS \quad dF = dU - TdS - SdT$$

y como

$$dU = TdS - PdV,$$

tenemos que

$$dF = -PdV - SdT$$

Con esto podemos encontrar la presión, la cual es:

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V}\bigg|_T = -\frac{\partial(U - TS)}{\partial V}\bigg|_T$$

Esto nos lleva a concluir que:

$$\frac{\partial U}{\partial V}\bigg|_T = -P + T\frac{\partial S}{\partial V}\bigg|_T$$

Ahora usamos las relaciones de Maxwell las que nos permiten cambiar:

$$T\frac{\partial S}{\partial V}\bigg|_V = T\frac{\partial P}{\partial T}\bigg|_V$$

por lo que para un gas ideal tenemos que:

$$\frac{\partial U}{\partial V}\bigg|_T = -p + \frac{\partial P}{\partial T}\bigg|_V$$

En el caso de un gas ideal tenemos que:

$$P = nkT \quad \frac{\partial P}{\partial T}\bigg|_V = nk$$

esto nos lleva a concluir que la energa no depende del volumen. En el caso de tener una gas de Van der Waals, tenemos que:

$$(P + \frac{N^2 a}{V^2})(V - Nb) = NkT \quad \frac{\partial P}{\partial T}\bigg|_V = \frac{NkT}{V - Nb}$$

Juntando estas dos ecuaciones obtenemos que:

$$\frac{\partial U}{\partial V}\bigg|_T = \frac{N^2 a}{V^2}$$

Ejercicio 2 Considere un elástico de largo l, con un extremo fijo y el otro siendo estirado con una fuerza f. Su ecuación de estado esta dada por

$$f = (K_0 + aT)(l - l_0),$$

donde K_0, a y l_0 son constantes. Considerando que el calor especifico a largo constante es independiente de la temperatura y que el elástico es estirado de manera adiabática y reversible. Encuentre la temperatura final, al estirarlo desde l_1 hasta l_2, dado que inicialmente se encuentre a una temperatura T_1.

Solución Queremos encontrar:

$$\frac{\partial T}{\partial l}\bigg|_S$$

Como el trabajo es hecho sobre el elástico podemos inferir que el potencial satisfecho es:

$$dU = TdS + fdL.$$

De esta expresión podemos encontrar la siguiente relación de Maxwell.

$$\frac{\partial f}{\partial S}\bigg|_L = \frac{\partial T}{\partial L}\bigg|_S$$

Por lo tanto necesitamos derivar f con respecto a S para poder encontrar nuestro resultado. Como no sabemos la dependencia entre S y l deberemos recurrir a encontrar en relación entre S y T. Sabemos que:

$$\frac{\partial U}{\partial T}\bigg|_l = C_l = T\frac{\partial S}{\partial T}\bigg|_l$$

De aquí podemos despejar la derivada de la temperatura con respecto a la entropía, la cual resulta ser:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial S}\right|_l = \frac{T}{C_l}$$

Podemos usar la regla de la cadena para derivar la fuerza con respecto a la temperatura y así obtener nuestro resultado:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial l}\right|_S = \frac{\partial}{\partial S}(K_0 + aT)(l - l_0)$$
$$= \frac{T}{C_l}\frac{\partial}{\partial T}(K_0 + aT)(l - l_0) = a(l - l_0)\frac{T}{C_l}$$

Debemos resolver esta ecuación diferencial. Para hacerlo usamos variables separables.

$$\ln T2/T1 = \frac{a}{2C_l}(l_2^2 - l_1^2) - \frac{al_0}{C_l}(l_2 - l_1)$$

Despejando y ordenando las variables concluimos que la temperatura final tiene la forma:

$$T_2 = T_1 exp\left[\frac{a}{2C_l}\Big((l_2 - l_0)^2 - (l_1 - l_0)^2\Big)\right]$$

Por lo que la temperatura crece si a es positivo y decrece en caso contrario.

Ejercicio 3 Es natural pensar que el volumen molar las fases gaseosas es mucho mayor que el de las fases líquidas o sólidas.
A.-)Considerando un gas que obedece la ley de los gases ideales, y un calor latente independiente e la temperatura, encuentre una expresión para la presión de equilibrio entre las fases.
B.-) Considere la misma transicón, pero ahora entre un gas ideal y una fase en la cual $PV = cte = a$ e independiente de la temperatura.

Solución A.-) Utilizamos la ecuación de Clausius-Clapeyron

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(V_2 - V_1)}{l}$$

donde l es el calor latente.

$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT^2}{lp} - \frac{TV}{l}$$

Si despreciamos el volumen molar de la fase sólida, tenemos que:

$$\frac{dT}{T^2} = \frac{R}{l}\frac{dp}{p}$$

Integrando obtenemos que:

$$-T^{-1} = \frac{R}{l}\ln p/p_0$$

de donde obtenemos que:

$$p = p_0 exp(-l/RT)$$

O sea la presión crece con la temperatura hasta alcanzar un máximo P_0.

B.-) Ahora tenemos que:

$$\frac{dT}{dP} = \frac{T}{L}\Big(\frac{TR-a}{p}\Big)$$

Necesitamos resolver

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{(TR-a)T}$$

La cual podemos reescribir como:

$$\ln p/p_0 = \int dt\Big(\frac{R/a}{(TR-a)} - \frac{1/a}{T}\Big)$$

$$\ln p/p_0 = \frac{R}{a}\ln{(TR-a)} - \frac{1}{a}\ln T$$

$$\ln p/p_0 = \frac{1}{a}\ln\frac{(TR-a)^R}{T}$$

Con lo que podemos concluir que:

$$p = p_0\, e^{1/a}\frac{(TR-a)^R}{T}$$

Con lo que la presión necesaria crece fuertemente para el régimen de altas temperaturas.

Figura 1:

Ejercicio 4 Se tiene una barra de hierro de masa despreciable sobre un trozo de hielo. De la barra cuelgan dos masas de magnitud m como se aprecia en la figura (1). Calor se libera por el tope de la barra y es conducida por ella, esto causa que el hielo se derrita. Encuentre la velocidad con la que baja la barra de hielo.

Solución La diferencia de presión entre las caras superiores e inferiores del metal causan una diferencia de temperatura dada por la ecuación de Clausius-Clapeyron (de manera discreta).

$$\Delta P = \frac{2mg}{cb}$$

donde bc es el area de la barra. Esta diferencia de presión causa una diferencia de temperatura.

$$\Delta T = \Delta P \frac{\Delta V}{l} = \frac{2mgT\Delta V}{cbl}$$

Por otra parte, sabemos que el hierro conduce calor, por lo cual el calor conducido entre su extremo superior y su extremo inferior hará que se derrita el hielo.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{kcb}{a}\Delta T$$
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{2k}{a}\frac{mgT\Delta V}{l}$$

El calor latente, es el calor necesario para fundir una unidad de masa del material. Sabemos cuanto calor entregamos por unidad de tiempo por lo que sabemos cuanto hielo derretiremos en este intervalo.

$$Q = Ml \;\rightarrow\; \Delta Q = \Delta M l = bc\,\Delta x\,\rho_H\,l$$

Con esto encontramos la velocidad la cual resulta ser:

$$\frac{\Delta x}{\Delta T} = \frac{2kmgT}{al^2\rho_H bc}\left(\frac{1}{\rho_{agua}} - \frac{1}{\rho_{Hielo}}\right)$$