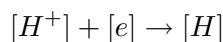


MECÁNICA ESTADÍSTICA. FIZ2220

AYUDANTÍA 12

César Augusto Hidalgo Ramaciotti
Licenciado en Física Facultad de Física.
Pontificia Universidad Católica de Chile.

Ejercicio 1 Considere la reacción en la cual un protón y un electrón se combinan para formar hidrogeno.



a.-) Demuestre que en el equilibrio satisface:

$$\frac{[H^+][e]}{[H]} \simeq \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-I/\tau}$$

donde I es la energía de ionización del hidrógeno.

b.-) Usando este resultado, demuestre que en un gas compuesto inicialmente sólo de hidrógeno la concentración de electrones está dada por:

$$[e] = [H]^{1/2} \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/4} e^{-I/(2\tau)}$$

Solución La ley de acción de masa nos dice que en equilibrio un sistema satisface:

$$\prod_j n_j^{\nu_j} = K(\tau)$$

con:

$$K(\tau) = \prod_j n_{Qj}^{\nu_j} e^{-(\nu_j F_j^{int})/\tau}$$

Si aplicamos esto a nuestro sistema tendremos:

$$[H^+][e][H]^{-1} = n_{Q[H^+]} e^{-F_{[H^+]}^{int}/\tau} n_{Q[e]} e^{-F_{[e]}^{int}/\tau} n_{Q[H]}^{-1} e^{F_{[H]}^{int}/\tau}$$

Si consideramos que la concentración cuántica está dada por

$$n_Q = \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2} \right)$$

y que:

$$F^{int} = \tau \log Z_{int}$$

tendremos que:

$$\frac{[H^+][e]}{[H]} = n_{Q[e]} \frac{Z_{[H]}^{int}}{Z_{[e]}^{int} Z_{[H^+]}^{int}}$$

donde hemos cancelado $n_{Q[H]}$ con $n_{Q[H^+]}$ ya que la masa del hidrógeno es similar a la masa de un protón.

La función partición interna del electrón y del protón son iguales a uno, ya que esto no tienen grados de libertad internos, la función partición interna del hidrógeno proviene de su energía de ionización, esto hace de ella:

$$Z_{[H]}^{int} = e^{-I/\tau}$$

con esto concluimos que:

$$\frac{[H^+][e]}{[H]} \simeq \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-I/\tau}$$

b.-)

Si consideramos que el gas estaba inicialmente formado sólo de hidrógeno tendremos que:

$$[H^+] = [e]$$

por lo que:

$$[e] \simeq [H^{1/2}] n_{Q[e]}^{1/2} e^{-I/2\tau}$$

Ejercicio 2 Determine el momento magnético y la susceptibilidad magnética de un gas ideal de fermiones dentro de un campo magnético uniforme B usando el formalismo a temperatura cero. El hamiltoniano del sistema está dado por:

$$H = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B B$$

donde μ_B es el magnetón de Bohr. El signo positivo cuenta para fermiones con un spin, mientras que el negativo es para aquellos con el spin contrario.

Solución: La función gran partición esta dada por:

$$Q = \prod_s (1 + e^{-\beta(\varepsilon_s - \mu - \mu_B B)})(1 + e^{-\beta(\varepsilon_s - \mu + \mu_B B)})$$

buscamos el logaritmo de la función gran partición:

$$\ln Q = \sum_s \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon_s - \mu - \mu_B B)}) + \sum_s \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon_s - \mu + \mu_B B)})$$

Aproximamos las sumas por integrales incluyendo la densidad de estados.

$$\ln Q = 2\pi V \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \left[\ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon_s - \mu - \mu_B B)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon_s - \mu + \mu_B B)}) \right]$$

El momento magnético del gas lo obtenemos derivando el logaritmo de la función gran partición con respecto a βB

$$M = 2\pi V \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \left[\mu_B f(\varepsilon - \mu_B V) - \mu_B f(\varepsilon + \mu_B V) \right]$$

y como a temperatura cero tenemos que la función de distribución de Fermi-Dirac pasa a ser un Heavyside, tenemos que:

$$M = 2\pi V \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \left[-(\varepsilon_f + \mu_B B) + (\varepsilon_f - \mu_B B) \right]$$

Para poder utilizar esta relación debemos incluir el hecho que el número de partículas es constante, de manera analoga a la anterior podemos demostrar que:

$$\langle N \rangle = 2\pi V \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \left[(\mu_f - \mu_B B)^{3/2} + (\mu_f + \mu_B B)^{3/2} \right]$$

También calculamos la energía de fermi en ausencia de campo magnético, la cual resulta ser:

$$(\mu_f^0)^{3/2} = \frac{3n}{8\pi} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{3/2}$$

Podemos usar la expansión $(1 \pm x)^\alpha = 1 \pm \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots$ cuando $\mu_B B \ll \mu_f$ con esto:

$$n = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu_f^{3/2} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{\mu_B B}{\mu_f} \right)^2 + \dots \right]$$

de est última relación podemos despejar el valor aproximado para μ_F , haciendo $\mu_F = \mu_f^0$, dentro del paréntesis redondo, con esto.

$$\mu_F \simeq \mu_f^0 \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{\mu_B B}{\mu_f^0} \right) \right]$$

si volvemos a usar la expansión para las potencias de $(1 + x)$ podemos aproximar

$$\mu_F \simeq \mu_f^0 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_B B}{\mu_f^0} \right) \right]$$

Continuamos aproximando, para esto realizamos las mismas aproximaciones sobre el momento magnetico e introducimos nuestra última epresión para μ_F , esto nos permite concluir que:

$$m = \frac{3}{2} n \frac{N \mu_B^2}{\mu_f^0} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\mu_B B}{\mu_f^0} \right) \right]$$

de aquí obtenemos la susceptibilidad del campo como:

$$\chi_M = \frac{m}{B} = \frac{3}{2} \frac{n \mu_B^2}{\mu_f^0}$$