1. Probabilidades Discretas: Caminantes Aleatorios, Valores Esperados y Desviaciones

César Augusto Hidalgo Ramaciotti
Licenciado en Física P.U.C.

Los problemas de esta ayudantía fueron extraídos del libro:
Fundamentals of Statistical Physics F. Reif. McGraw-Hill 1965.

1.1 Ejercicio

Encuentre la probabilidad de obtener 6 puntos o menos con 3 dados.

1.1.1 Solución

La cantidad de combinaciones posibles al lanzar 3 dados son $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. De estas solo queremos aquellas que sumen seis puntos o menos. Para esto diseñamos la siguiente tabla.

Combinación	1,1,1	1,1,2	1,1,3	1,1,4	2,2,1	2,3,1	2,2,2
Multiplicidad	1	3	3	3	3	6	1

La probabilidad pedida es la suma de las multiplicidades sobre el total de combinaciones posibles por ende es:

$$\boxed{P = 20/216 = 5/54}$$

1.2 Ejercicio

En el juego de la ruleta rusa (el cual no recomendamos) se inserta solamente una bala en el barril de un revolver. Este luego se hace girar y se cierra de súbito. El revolver es

luego apuntado a la sien (o al interior de la boca) y es disparado. Encuentre:
A.-) La probabilidad de sobrevivir N juegos.
B.-) La probabilidad de sobrevivir $(N-1)$ juegos y morir al $N'esimo$.
C.-) El promedio de jugadas que dura el juego.

1.2.1 solución

A.-) La probabilidad de sobrevivir un juego es 5/6. La probabilidad de no sobrevivir es 1/6. Esto nos lleva a concluir que la probabilidad pedida es:

$$\boxed{P(\text{Sobrevivir } N \text{ Juegos})=(5/6)^N}$$

B.-) La probabilidad de sobrevivir $N-1$ juegos y morir al $N'esimo$ es:

$$\boxed{P(\text{Sobrevivir } N \text{ Juegos y Morir al Siguiente})=(5/6)^{N-1}(1/6)}$$

C.-) El valor esperado de jugadas requiere un esfuerzo un poco mayor. Denotaremos el número esperado de jugadas como $\langle J\rangle$. Este es igual a:

$$\langle J\rangle = A(\frac{5}{6}+2(\frac{5}{6})^2+3(\frac{5}{6})^3+\ldots)$$
$$\langle J\rangle = A\sum_{s=1}^{\infty} sp^s$$

Donde p es la probabilidad de sobrevivir 1 juego. El factor de normalización es:

$$A\sum_{s=1}^{\infty} p^s = 1 \quad \rightarrow \quad A = 1-p$$

Ya que tenemos la distribución propiamente normalizada reescribimos el valor esperado de manera de poder calcularlo.

$$\langle J\rangle = \lim_{\alpha\to 1} A\sum_{s=1}^{\infty}\frac{d}{d\alpha}p^{s\alpha} = \lim_{\alpha\to 1} A\frac{d}{d\alpha}\sum_{s=1}^{\infty}p^{s\alpha}$$
$$\langle J\rangle = \lim_{\alpha\to 1} A\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{1-p^\alpha} = \lim_{\alpha\to 1} A\frac{\alpha p^{\alpha-1}}{(1-p^\alpha)^2}$$

Introduciendo la normalización obtenemos como valor esperado.

$$\boxed{\langle J\rangle = \tfrac{1}{1-p} = 6}$$

Este resultado era de esperarse ya que una de las interpretaciones de las probabilidades es la de frecuencia relativa. La probabilidad de morir en un intento es 1/6. El inverso de la probabilidad es un buen estimador del tiempo esperado para lograr un exito.

1.3 Ejercicio

Dos ebrios comienzan a caminar unidimensional y aleatoriamente desde el origen del eje x. Dado que la probabilidad de caminar hacia la derecha es igual que la probabilidad de caminar hacia la izquierda encuentre la probabilidad de que se encuentren después de N pasos.

1.3.1 Solución

Para resolver este problema es conveniente definir tres probabilidades.

p_1=Probabilidad de que los borrachos se acerquen=(1/4)
p_2=Probabilidad de que los borrachos se alejen=(1/4)
p_3=Probabilidad de que los borrachos conserven su distancia=(1/2)

También denotaremos por n_1, n_2 y n_3 ($n_1+n_2+n_3 = N$) a la cantidad de oportunidades en la cual cada uno de los eventos enunciados anteriormente ocurran. La probabilidad de cada combinación de eventos esta dado por una distribución trinomial.

$$P(n_1, n_2, n_3) = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$$

Cada probabilidad está representada por los términos de igual potencia del trinomio:

$$(p_1 + p_2 + p_3)^N = P = \sum_{n_1,n_2,n_3}^{N} = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$$

Buscamos aquellos en los que la potencia de p_1 es igual a la potencia de p_2, o sea $n_1 = n_2$. El truco consiste en hacer el siguiente cambio de variables.

$$p_1 = xp_1 \quad p_2 = \frac{p_2}{x} \quad p_3 = p_3$$

Introduciendo esto en la ecuación anterior obtenemos

$$(p_1 x + \frac{p_2}{x} + p_3)^N = P = \sum_{n_1,n_2,n_3}^{N} = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} x^{n_1 - n_2}$$

por lo que la probabilidad pedida es igual al término del polinomio en el cual aparece x^0. En nuestro caso particular el polinomio es.

$$(\frac{x}{4} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{2})^N$$

$$= (\frac{1}{2})^{2N} \cdot (x^{1/2} + x^{-1/2})^{2N}$$

$$= (\frac{1}{2})^{2N} \cdot \sum_{n=0}^{2N} \frac{(2N)!}{n!(2N-n)!}(x^{1/2})^n(x^{-1/2})^{2N-n}$$

El termino de la suma que buscamos es el con $n = N$. Esto nos lleva a concluir que la probabilidad buscada es:

$$P = (\frac{1}{2})^{2N} \cdot \frac{(2N)!}{(N!)^2}$$

1.4 Ejercicio

Un caminante aleatorio camina con probabilidad p y permanece quieto con probabilidad $1-p$.
A.-)Encuentre el valor esperado de pasos dados en N intentos.
B.-)Encuentre la desviación en torno a este valor.
C.-)Deduzca una formula general que permita calcular el valor esperado de cualquier potencia del número de pasos.

1.4.1 Solución

A.-) La distribución de pasos dados es binomial, por lo que el valor esperado pedido es:

$$\langle pasos \rangle = \sum_{n=0}^{N} n \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{N-n}$$

la suma tiene un factor global n que permite cambiar el recorrido de esta. Hacemos esto y extraemos algunos términos.

$$= Np \sum_{n=1}^{N} \frac{(N-1)!}{(N-n)!(n-1)!} p^{n-1} (1-p)^{N-n}$$

Realizamos el cambio de variable $n - 1 = m$ con esto obtenemos

$$= Np \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-m)!m!} p^m (1-p)^{N-1-m}$$

$$= Np \cdot (p + 1 - p)^{N-1}$$

$$\boxed{\langle pasos \rangle = Np}$$

B.-)Como es costumbre para obtener la desviacin debemos obtener el valor de $\langle pasos^2 \rangle$. El cual esta dado por.

$$\langle pasos^2 \rangle = \sum_{n=0}^{N} n^2 \cdot \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Utilizamos el hecho que hay un factor global n^2 para cambiar los índices y reescribimos el valor esperado de la siguiente manera.

$$\langle pasos^2\rangle = \sum_{n=1}^{N} n \cdot \frac{N!}{(N-n)!(n-1)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Cambiamos variable usando $n-1=m$. Esto alarga un poco las cosas.

$$= \sum_{m=0}^{N-1} m \cdot \frac{N!}{(N-1-m)!m!} p^{m+1}(1-p)^{N-1-m} + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{N!}{(N-1-m)!m!} p^{m+1}(1-p)^{N-1-m}$$

Notamos que la primera suma tiene un factor global m el cual nos permite despreciar el primer término. Sacamos afuera los factores necesarios para obtener.

$$= N(N-1)p^2 \sum_{m=1}^{N-1} \cdot \frac{(N-2)!}{(N-1-m)!(m-1)!} p^{m-1}(1-p)^{N-1-m} + \dots$$

$$\dots Np \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-m)!m!} p^m (1-p)^{N-1-m}$$

En el primer término hacemos el cambio de variables $m-1=k$. El segundo término ya esta listo, solo vasta notar que la suma es igual a la unidad, (es lo mismo que en la parte A). Nuestro penúlimo paso es:

$$= N(N-1)p^2 \sum_{k=0}^{N-2} \cdot \frac{(N-2)!}{(N-2-k)!k!} p^k (1-p)^{N-2-k} + Np$$

Nuestro último paso es darnos cuenta que esta otra suma es igual a la unidad y escribir nuestro resultado en cajita.

$$\boxed{\langle pasos^2\rangle = N(N-1)p^2 + Np}$$

Calcular la desviación sale directo al usar la relación:

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

por lo que:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{N^2p^2 - N(N-1)p^2 - Np} = \sqrt{Np(1-p)}}$$

C.-) Denotemos como $F_k(p,q)$ al momento central k'ésimo de la distribución binomial.

$$F_k(p,q) = \sum_{n=0}^{N} n^k \frac{N}{n} p^n q^{N-1}$$

Notamos que existe un operador el cual actuando sobre p es capaz de votar cuantas $n's$ uno quiera sin cambiar la potencia de p. Este es:

$$(p\frac{\partial}{\partial p})^k p^n = n^k p^n$$

Por lo que podemos encontrar la esperanza de cualquier potencia de una variable binomial utilizando:

$$F_k(p,q) = (p\frac{\partial}{\partial p})^k (p+q)^N$$

1.5 Ejercicio

Para una distribución de Poisson

$$P(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

encuentre:
A.-) Que esta propiamente normalizada.
B.-) Su valor esperado.
C.-) Su varianza.

1.5.1 Solución

A.-)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

B.-)

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} \lambda = \lambda$$

C.-)

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lambda\lambda^{n-1} e^{-\lambda}}{(n-1)!}$$

hacemos $n-1=m$ para obtener.

$$\lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\lambda^m}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \right]$$

$$\lambda e^{-\lambda} \left[\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} \right]$$

$$\lambda^2 + \lambda$$

por lo que la varianza es:

$$\boxed{\sigma^2 = \lambda}$$
